LXXXV.

LA GEOMETRIA D'OGGIDÌ E I SUOI LEGAMI COLL'ANALISI

« Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses »,
in Heidelberg, vom 8. bis 13. August 1904, pp. 109-120;
« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »,
tomo XIX, 1905, pp. 81-93 [*].

Voi conoscete il volumetto che l'Università di Kolozsvár ha publicato due anni sono, pel centenario della nascita di GIOVANNI BOLYAI (1). Ne sono parte precipua una Memoria di L. SCHLESINGER sulle applicazioni della geometria assoluta alla teoria delle funzioni di variabile complessa, ed un'altra di P. STÄCKEL sulla meccanica analitica in relazione colle varietà di più dimensioni (2). Così alla glorificazione del grande geometra ungherese prendevano parte l'Analisi e la Meccanica!

A me parve di vedere in ciò un nuovo indizio dei sentimenti fraterni che vanno sempre più legando fra loro i vari rami della Matematica!

Per quel che riguarda la Meccanica, non occorre che io dica quanta parte abbia e debba avere in essa la Geometria! Solo mi permetterò di ricordarvi, a proposito della Geometria moderna, una rappresentazione, di grande importanza suggestiva, a cui ormai, dopo l'esempio dato da HERTZ, tutti i cultori della Meccanica ricor-

---

[*] La presente conferenza è stata tradotta in polacco, col titolo: *Geometrya dzisiejsza i jej zwiazki z analiza*, in Wiadamosci matematycznych, t. IX, 1905, pp. 7-21 [N. d. R.].

(1) JOANNIS BOLYAI *in memoriam*.

(2) V. anche STÄCKEL, *Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten*, Jahresber. der deutschen Math.-Vereinigung, 12, 1903, p. 469.

rono liberamente. Voglio dire la rappresentazione di un sistema mobile con n gradi di libertà per mezzo di un punto dello spazio ad n o a $2n$ dimensioni. Indicando la forza viva con ds^2/dt^2, il problema del moto equivale a quello geometrico delle geodetiche di uno spazio ad n dimensioni, in cui ds sia l'elemento lineare!

Quanto ai legami che stringono la Geometria e l'Analisi, si può dire che essi derivano principalmente da ciò che *in molta parte gli oggetti di cui si occupano sono gli stessi*, almeno in un senso astratto! Dicendo così, io non alludo soltanto a quei campi che tutti riconoscono esser comuni alle due scienze: come, ad esempio, la teoria dei gruppi e quella degli aggregati (*ensembles*, *Mengen*). Io penso ad un'identità molto più larga, che solo è nascosta in parte dalla differenza dei nomi. Così quello che l'analista chiama una *funzione* $y = f(x)$, il geometra considera come *curva* $y = f(x)$, o come *corrispondenza* fra il punto x e il punto y. Ciò che l'analista chiama *equazione differenziale* sarà pel geometra una certa *varietà di elementi* nel senso di SOPHUS LIE. E i gruppi di *trasformazioni lineari* usati nello studio delle funzioni automorfe da POINCARÉ e KLEIN, e poi dai loro successori, si posson considerare come particolari gruppi di *movimenti* non-euclidei. Persino il concetto primitivo di *punto* si può riguardare come comune alla Geometria ed all'Analisi: poichè in molta parte della Geometria d'oggidì i punti si posson concepire in modo puramente numerico, come si fa, ad esempio, nella teoria degli aggregati o in quella delle funzioni!

La differenza fra Geometria ed Analisi consiste invece, talvolta nei *problemi* che esse pongono, più spesso nei *metodi* con cui esse li trattano. Ed è appunto collo scambiarsi fra loro i problemi, e col prestarsi reciprocamente l'aiuto dei rispettivi metodi, che le due scienze sorelle rendono l'una all'altra servizi immensi!

L'identità che ho accennato fra gli oggetti della Geometria moderna e quelli dell'Analisi si collega ad un carattere spiccatissimo che la Geometria è andata acquistando sempre più. Questo carattere, da cui son derivati i maggiori progressi di quella scienza, è *la grande generalità ed astrazione nei concetti e nelle proposizioni.*

A prova di ciò non occorre che io ricordi l'estensione che s'è fatta coll'aggiungere agli elementi geometrici reali quelli imaginari, nè l'altra che accanto alle linee e superficie pose i sistemi comunque infiniti di linee o superficie, i connessi, e così via. E nemmeno occorre che io vi parli della geometria degli spazî a più dimensioni, nella quale tanto si è lavorato nell'ultimo ventennio, e che tanto ha

contribuito ad ampliare il campo d'azione dei matematici! Ma scendendo invece dalle vette della scienza alle sue basi, noi vediamo che appunto la detta astrazione si trova nei più recenti lavori sui *fondamenti della geometria* di PEANO, VERONESE, PIERI, come in quelli di HILBERT e della sua scuola. In fatti essi svolgono la geometria in modo esclusivamente deduttivo, senz'alcun ricorso all'intuizione spaziale (*räumliche Anschauung*): cosicchè le parole *punto*, *retta*, *movimento*, ecc. non esigono più l'interpretazione consueta, ma possono riceverne parecchie, diverse fra loro, di qualsiasi natura, per esempio puramente aritmetiche, purchè soddisfacciano al sistema di postulati o definizioni che furon poste. In questo modo, accanto alle due geometrie non-euclidee di qualche tempo addietro, son divenute possibili in questi ultimi anni tutta una serie numerosa di nuove geometrie!

Questa moltiplicità d'interpretazioni per gli elementi geometrici, che incontriamo tanto nel moderno indirizzo di studio dei fondamenti, quanto in un modo ben noto di concepire gli spazi a più dimensioni, presenta grande utilità. Grazie ad essa ogni risultato si traduce in infiniti nuovi risultati, immediatamente! Qualcosa di simile si ha nella meccanica moderna, quando si parla di problemi dinamici *equivalenti*, sebbene si riferiscano a sistemi molto diversi.

Alcuni hanno obiettato, anche ultimamente (3), che, quando gli enti geometrici vengono concepiti in modo così astratto, oppure quando vengon trattati solo con metodo logico-deduttivo, senza ricorrere alle figure, alla intuizione spaziale, non si fa più *vera geometria*! Possiamo dire, o Signori, che questa è solo una questione di parole! Ma si può anche dire che l'ampliarsi della Geometria ha fatto passare l'intuizione spaziale, che una volta era per essa un elemento indispensabile, in seconda linea. Chi mai può concepire nella sua mente un connesso, oppure lo spazio di punti imaginari che STAUDT ha studiato sinteticamente? Così l'intuizione spaziale ha cessato di essere necessaria. E ciò invece che caratterizza la Geometria d'oggidì è, come già accennavo, la forma dei suoi problemi o dei suoi ragionamenti! (4)

---

(3) V. ad es. E. B. WILSON, *The so-called Foundations of Geometry*, Archiv der Math. und Phys., (3) 6, 1903, p. 104. Del resto questo articolo ha pienamente ragione, quando raccomanda di guardarsi dalle esagerazioni, dalle manie.

(4) Cfr. anche il mio articolo, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*, Rivista di mat., I, 1891; ristampato ora in inglese nel Bull. Amer. Math. Soc., (2) 10, 1904 [V. questo volume, pp. 387-412]. Veggasi pure E. STUDY, *Geometrie der*

E a proposito dei metodi geometrici, permettetemi che io vi dica anche il mio pensiero intorno ad un'accusa che a loro vien fatta talvolta: cioè di *poco rigore*. Già nel congresso internazionale di Parigi HILBERT aveva protestato energicamente contro l'opinione che solo l'Analisi, e non la Geometria, sia suscettibile di una trattazione pienamente rigorosa (5). E in fatti: perchè non dovrebbero esser rigorosi quei ragionamenti geometrici i quali fossero svolti *a fil di logica*? Il dubbio potrebbe aversi solo per quegli altri casi in cui insieme al ragionamento puro si adopera anche la intuizione geometrica: per esempio nelle ricerche più comuni di *Analysis situs* o *topologia*. Ma, come ho detto prima, questo accade solo in una piccola parte della Geometria moderna! E fra parentesi ricorderò che, secondo rilevava ultimamente OSGOOD (6), anche nella odierna teoria delle funzioni di una variabile complessa vi sono dei teoremi, la cui dimostrazione non è stata finora liberata dall'uso della intuizione geometrica! D'altra parte bisogna pur avvertire che già s'è cominciato a mettere sotto forma matematicamente esatta alcuni concetti e proposizioni dell'*Analysis situs*: ad esempio in recenti lavori di SCHOENFLIES, OSGOOD ed altri.

In generale si può dire che i geometri aspirano oggidì al rigore quanto gli analisti! È vero che gli strumenti di cui essi si servono talvolta non furon creati perfetti: come perfetti non erano i procedimenti usati dagli analisti un secolo fa! Ma si deve tener presente che alla Geometria, forse più che all'Analisi, occorre lasciar libera anzitutto la fantasia che guida alla scoperta: mentre è opera posteriore lo stabilire il tutto in modo rigoroso! Ed i geometri mirano a perfezionare i loro metodi, ricorrendo volentieri all'esempio ed all'aiuto dell'Analisi. Così dalle ricerche analitiche di PUISEUX si è dedotto il concetto geometrico esatto di *ramo* o *ciclo* di curva algebrica. Grazie ad esso CAYLEY, SMITH, HALPHEN, NOETHER, ZEUTHEN, ecc. han potuto dare una teoria pienamente rigorosa delle singolarità superiori delle curve piane; il teorema sul numero delle intersezioni di tali curve ha acquistato, col fissare la moltiplicità di ogni intersezione, un significato geometrico pienamente soddisfacente. Con ciò è stata avviata la trattazione rigorosa delle questioni relative

---

Dynamen, Leipzig 1903, ove, a p. 271, sono esposte delle idee che si accordano pienamente colle mie.

(5) D. HILBERT, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachr., 1900.

(6) W. F. OSGOOD, *On a Gap in the ordinary Presentation of* WEIERSTRASS' *Theory of Functions*, Bull. Amer. Math. Soc., (2) 10, 1904, p. 294.

alla *moltiplicità delle soluzioni* dei problemi geometrici. Ma una tale trattazione sarà compiuta solo quando saran compiute le ricerche analoghe per le intersezioni delle varietà algebriche a più dimensioni.

La stessa cosa accadrà per tutti i metodi della *Geometria numerativa*, poichè in sostanza tutti si riducono a problemi d'intersezioni di varietà algebriche! Così le critiche mosse anche ultimamente (7) a quello che SCHUBERT ha chiamato *Princip von der Erhaltung der Anzahl* potranno essere eliminate (8). Un mio discepolo, il GIAMBELLI, da me spinto a studiar la questione, mi disse di esser riuscito a fissare delle grandi classi di problemi per le quali vale quel principio di SCHUBERT, ed altre per cui esso va modificato in un modo ben determinato. In base a queste ricerche tutti i numerosi risultati ottenuti dallo SCHUBERT e da altri, anche in questi ultimi anni, per mezzo di quel principio, sarebbero pienamente giustificati! Noterò di passaggio che fra i recenti risultati di geometria numerativa ve ne sono di molto importanti relativi agl'iperspazî. Essi son dovuti principalmente allo stesso SCHUBERT ed a vari geometri italiani, a partire dal CASTELNUOVO fino al GIAMBELLI. E si riferiscono: gli uni al numero degli spazî che verificano date condizioni, in particolare quella di secare in dati modi più spazî dati, od anche una curva o varietà data; gli altri invece a numeri di quadriche o di reciprocità, e così via.

Fra questi risultati ve ne sono che hanno uno speciale interesse per l'*Algebra*. E molti problemi difficilissimi dell'Algebra relativi alla determinazione di *numeri* posson risolversi facilmente colla Geometria numerativa! D'altra parte, come già accennai, questa deve ricorrere all'Algebra per la dimostrazione dei suoi principî, per la trattazione rigorosa delle varietà algebriche e delle loro intersezioni. Una tale trattazione s'è già cominciato a fare seguendo i concetti di KRONECKER ed altri. Così HILBERT in un lavoro fondamentale (9) ha trovato la forma di quella che egli ha chiamato *funzione caratteristica* di un *modulo*, e che dà la *postulazione* di una varietà al-

---

(7) V. la nota a p. 378 della citata *Geometrie der Dynamen* dello STUDY; e G. KOHN, *Über das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl*, Archiv der Math. und Phys., (3) 4, 1903, p. 312.

(8) È notevole che nel *Lehrbuch der Algebra* di H. WEBER (I. Bd., 1 Aufl., 1895, p. 163) si ricorre appunto a quel principio, per dimostrare il teorema di BÉZOUT nel caso di 3 o più equazioni con altrettante incognite.

(9) *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann., XXXVI, 1890, p. 473.

gebrica qualunque per forme di un ordine abbastanza elevato. E dopo di HILBERT altri han tentato di risolvere più completamente il problema della postulazione in certi determinati casi; oppure, come nelle numerose ricerche sul teorema di NOETHER $Af + B\varphi$, si sono occupati della rappresentazione di una varietà algebrica come costituente un *modulo*. Ma il campo amplissimo è tuttora aperto, e degno di profonde ricerche!

Signori, vi è una *moda* in Geometria come dovunque! Ma la moda di cui ora io voglio parlarvi rappresenta un grande progresso! Prima vi avevo detto dell'astrazione che ha acquistato la Geometria colla grande estensione data al sistema degli enti da studiare. Orbene l'astrazione s'è compiuta anche in un altro modo: cioè coll'ampliamento del *gruppo di trasformazioni*, che, nel senso di KLEIN, si pone a base dello studio. Una volta il gruppo di trasformazioni, che si sottintendeva come fondamentale, era quello della Geometria elementare. Poi, dopo PONCELET, i geometri s'erano abituati al punto di vista projettivo, e questo era ordinariamente sottinteso. Ai nostri giorni invece si tende a preferire un gruppo fondamentale ancora più ampio: *il gruppo delle trasformazioni birazionali*!

Con ciò non intendo certo dire che siano scarsi attualmente i lavori nell'indirizzo projettivo! Così poc'anzi alludevo a ricerche projettive essenziali sulle varietà algebriche a più dimensioni. Inoltre si sa bene che le proposizioni d'indirizzo birazionale si mutano, con un semplice artifizio, in proposizioni projettive. E nemmeno mancano lavori d'indole metrica, come tutti sanno! È certo però che sono state rare in questi ultimi tempi le ricerche un po' generali, nell'indirizzo projettivo, sulle curve piane o superficie algebriche, sui complessi di rette, ecc., le quali fiorivano invece anni sono. Ciò è forse dovuto in parte alla complicazione che s'incontrerebbe nel proseguirle. In pari tempo è andata un po' giù di moda la corrispondente teoria analitica, cioè la teoria degl'invarianti delle forme algebriche; sebbene essa sia stata, per così dire, rinfrescata da nuovi metodi e posta in nuova luce dalla teoria dei gruppi di SOPHUS LIE. Invece l'indirizzo che RIEMANN ha tracciato per lo studio delle funzioni algebriche di una variabile e dei loro integrali, cioè quello rivolto alle proprietà che non mutano per trasformazioni birazionali delle variabili, può dirsi il trionfatore nelle ricerche algebrico-geometriche d'oggidì!

A ciò contribuì moltissimo la teoria generale delle trasformazioni birazionali del piano e dello spazio: merito speciale del CRE-

MONA, di cui noi tutti da un anno rimpiangiamo la perdita! Da essa in fatti derivò il concetto di proprietà invariabili per trasformazioni Cremoniane: applicato ad esempio dal BERTINI alle involuzioni del piano.

Ma un'influenza anche maggiore sul trionfo odierno delle proprietà degli enti algebrici, che non mutano per trasformazioni birazionali degli enti stessi, ebbe la Memoria del 1873 di BRILL e NOETHER: *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (10). Essa non ha solo contribuito — come già prima CLEBSCH e GORDAN — a far conoscere quell'indirizzo di RIEMANN. Col sostituire alle funzioni algebriche le *serie lineari* di gruppi di punti sopra una curva algebrica, essa ha anche dato ai teoremi noti e ad altri, nuovi e fondamentali, una tal forma geometrica da prestarsi immediatamente alle applicazioni. L'influenza di quella Memoria sulla Geometria attuale è stata immensa! Ne derivarono direttamente le ricerche moderne sulle curve algebriche sghembe ed iperspaziali, quelle sui sistemi lineari di curve piane, ed altre ancora. Tutta una scuola di geometri italiani riconosce nella Memoria di BRILL e NOETHER il suo punto di partenza!

Più fecondi ancora divennero quei concetti, quando, per opera appunto di questa scuola, essi acquistarono un carattere più astratto e più generale, venendo riferiti a curve iperspaziali, e specialmente introducendosi metodicamente l'importante nozione di *somma* di due serie lineari (corrispondente a quella di *prodotto* nel campo di razionalità definito da un irrazionale algebrico). Con questi strumenti CASTELNUOVO ha ottenuto nuovi risultati notevolissimi sulle curve algebriche, per esempio riguardo alla questione che ho già citata della postulazione. Più notevole ancora è il modo come quella teoria ha potuto applicarsi, od estendersi per analogia, nella geometria delle superficie!

Mentre in Francia il PICARD studiava le superficie algebriche per via trascendente, svolgeva cioè la teoria degl'integrali doppi e degl'integrali di differenziali totali delle funzioni algebriche di due variabili, e l'HUMBERT si occupava con successo delle così dette superficie iperellittiche, in Italia, dal 1893 in poi, ENRIQUES e CASTELNUOVO presero a costruire geometricamente la teoria dei sistemi lineari di curve sopra una superficie algebrica. Essi applicarono i

(10) Math. Ann., VII, p. 269.

concetti della geometria sopra una curva ed i concetti analoghi relativi ad una superficie, per esempio quelli di somma e differenza di due sistemi lineari, da cui poi si passa a quello di sistema *aggiunto* di un sistema dato; e nello stesso tempo si valsero, approfondendole ulteriormente, delle importanti proposizioni che già il NOETHER aveva ottenuto in questo campo. Così riuscirono a stabilire una lunga serie di nuovi risultati veramente brillanti. Citerò, solo come esempî, la dimostrazione della razionalità di tutte le involuzioni piane; lo studio di nuovi caratteri di una superficie, invariabili per trasformazioni birazionali; le condizioni perchè una superficie sia razionale, oppure sia riferibile ad una rigata; la possibilità di eliminare da una superficie le così dette curve eccezionali, se la superficie non è riferibile ad una rigata (11). Nel trattato in cui il PICARD, coadiuvato dal SIMART, va esponendo la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (12), accanto alle sue proprie ricerche analitiche egli ha pur fatto posto ad una parte di quelle geometriche di CASTELNUOVO ed ENRIQUES.

La geometria sopra una superficie si applica — non occorre dirlo — a varietà algebriche doppiamente infinite qualunque. Così il FANO se n'è servito nello studio delle congruenze di rette. Ed altri giovani si sono ora messi a coltivarla, tra cui DE FRANCHIS e SEVERI. Fra le tante questioni a cui tendono le ricerche attuali citerò la seguente, di grande importanza: è possibile fissare sopra una data superficie algebrica un numero finito di sistemi continui di curve, sì che ogni altra curva algebrica possa dedursi da quelle colle operazioni di addizione e sottrazione? Finora essa era stata risolta affermativamente solo per certe classi di superficie (13). Il SEVERI ritiene di possederne la soluzione per qualunque superficie, ma ancora non l'ha pubblicata. Teoremi siffatti hanno un'alta importanza sì geometrica che algebrica. Essi permettono di definire per le curve giacenti su una data superficie certi *caratteri*, grazie a cui molte proprietà delle curve stesse, per esempio il numero delle loro mutue intersezioni, risultino determinate.

---

(11) V. CASTELNUOVO-ENRIQUES: *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Ann. mat., (3) 6, 1901, p. 165. Ivi son citati anche i lavori precedenti.

(12) Paris, t. I, 1897; t. II, 1900, 1904.

(13) Così il PICARD (*Théorie*, t. II, pp. 246-247) ha un teorema analitico, che risolve la questione per quelle superficie i cui integrali di differenziali totali si riducono a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Alla geometria delle trasformazioni birazionali appartiene anche lo studio delle corrispondenze algebriche su una data varietà. Voi sapete, o Signori, che HURWITZ, per mezzo degl'integrali Abeliani e delle funzioni Θ, è riuscito a trattare in modo completo le corrispondenze algebriche fra i punti di una data curva algebrica: in particolare le corrispondenze birazionali. Quanto alle corrispondenze sulle superficie algebriche, si hanno solo pochi risultati speciali, di PICARD, CASTELNUOVO-ENRIQUES e PAINLEVÉ, intorno alle superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali.

Invece per quel che riguarda i *gruppi* di trasformazioni birazionali del piano, essi sono stati determinati completamente: quelli d'ordine finito da KANTOR e WIMAN, quelli continui da ENRIQUES. ENRIQUES e FANO hanno poi determinato anche i gruppi continui birazionali dello spazio. In queste ricerche i metodi geometrici hanno servito ben più che quelli analitici. Del resto tutti sanno quanto il grande creatore della teoria dei gruppi continui, SOPHUS LIE, si sia valso dei metodi geometrici nella sua costruzione; e come, ad esempio, il problema della *struttura* dei gruppi continui finiti si riduca a studiare la intersezione di certe varietà lineari e quadratiche!

La teoria dei *gruppi*, sia quella di GALOIS, sia quella di LIE, si presenta spesso nelle ricerche geometriche dei nostri tempi. E vi sono sicuri indizî che la sua influenza sulla Geometria è destinata a crescere!

Le varietà di enti che si considerano ordinariamente in Geometria sono *analitiche*, od in particolare *algebriche*: definibili cioè con legami analitici od algebrici fra le coordinate complesse dei loro elementi. Ma, seguendo la tendenza ad ampliare il campo geometrico, si possono anche studiare delle varietà più generali: ottenute cioè considerando staccatamente, come variabili indipendenti, le due componenti reali di ogni coordinata complessa; e ponendo dei legami fra le varie coppie di componenti reali. Se questi legami sono algebrici, si hanno le così dette varietà *iperalgebriche*, intorno a cui io ho pubblicato verso il 1890 alcune ricerche [14]. Fra esse vi sono le imagini geometriche di quelle forme quadratiche di HERMITE a variabili complesse coniugate, che si son presentate tanto spesso in questi anni, collegandosi ai gruppi di sostituzioni lineari ed alle funzioni

[14] Atti Acc. Torino, 25 e 26, quattro Note [v. queste « Opere », II, pp. 237-337]; e Math. Ann., XL [V. queste « Opere », II, pp. 338-385].

automorfe. Così le forme di HERMITE nel campo quaternario rappresentano delle corrispondenze fra punti e piani molto analoghe alla polarità rispetto ad una quadrica. Considerandole sotto questo aspetto geometrico, varie questioni su quelle forme, per esempio sulle loro espressioni canoniche, sulle loro trasformazioni lineari in se stesse, ecc., riescono notevolmente semplificate.

Fra le varietà iperalgebriche si trovan pure quelle composte dei punti reali di una varietà algebrica. Così dalla geometria degli enti *complessi* passiamo a quella degli enti *reali*!

Le funzioni di variabili complesse han fatto trascurare per qualche tempo le funzioni di variabili reali, sebbene queste sian più importanti di quelle! Ora, o Signori, lo stesso fatto è accaduto in Geometria! Sono pochi gli scienziati che si occupano delle questioni di realità, o forma, o topologia; quantunque esse costituiscano un campo così degno di essere coltivato!

Quanto all' *Analysis situs*, dopo i noti lavori di W. DYCK e quelli del PICARD, si sono avute, anche ultimamente, parecchie ricerche originali del POINCARÉ su problemi molto generali.

Intorno alla forma delle superficie algebriche non si è più avuto nulla di essenziale dopo ciò che ha fatto il ROHN per le superficie del 4^0 ordine. Invece sulla forma delle curve algebriche HILBERT ([15]) ha risolto alcune questioni: per esempio sui rami pari di curve piane che possono stare l'uno dentro l'altro, e sulle curve sghembe di dato ordine col massimo numero di rami. KLEIN ([16]) ha studiato le questioni di realità per le forme di contatto (*Berührungsformen*) della curva canonica reale di genere dato (*Normalkurve der* φ), in base alla distinzione da lui fatta delle superficie *simmetriche* di RIEMANN in specie. E qualche altra ricerca è stata fatta da F. MEYER ed altri.

Alcuni scienziati, come H. BRUNN e più ancora A. KNESER ([17]), han tentato di studiare la forma delle curve reali senza porre la condizione dell'algebricità, solo ammettendo qualche condizione di continuità. I risultati più notevoli in questa direzione furon ottenuti nel 1899 da C. JUEL ([18]), specialmente profittando del fatto che in

---

([15]) *Über die reellen Züge algebraischer Curven*, Math. Ann., XXXVIII, 1891, p. 115.

([16]) *Über Realitätsverhältnisse bei der Normalcurve der* φ, Math. Ann., XLII, 1893, p. 1.

([17]) Math. Ann., XXXI, XXXIV, XLI.

([18]) *Introduction à l'étude des courbes graphiques*, Mém. Acad. Danemark, Kjobenhavn, 1899.

determinati casi una corrispondenza reale d'indici p, q ha sempre $p + q$ coincidenze reali.

Infine anche nella trattazione delle curve definite da equazioni differenziali si è discussa la forma delle curve. Citerò fra i moderni, oltre alle note ricerche di POINCARÉ e PICARD, ed a quelle speciali di HADAMARD relative alle trajettorie ed alle geodetiche di una data superficie, una tesi del 1903 di H. DULAC [19]. È notevole che, per aver la forma delle curve integrali di un'equazione differenziale di 1^0 ordine in prossimità di un punto singolare, si può ricorrere ad un procedimento del tutto analogo a quello che si usa pei rami reali di una curva algebrica uscenti da un punto singolare.

Dalla geometria complessa ero passato a quella reale. Ma debbo pure avvertire che l'astrazione, che ripetutamente ho messo in evidenza come un carattere della Geometria moderna, ha avuto anche l'effetto di moltiplicare, per così dire, le *geometrie complesse.*

Da un lato si può avere l'opportunità di considerare certi enti geometrici come *punti* di nuova natura, aventi per coordinate numeri complessi di specie superiore. Così nello studio delle varietà iperalgebriche, fin nei problemi più semplici che nascono dalla considerazione dei rami reali di una curva algebrica, si son presentati spontaneamente dei *punti bicomplessi* [20].

D'altra parte, come strumenti di ricerca, si sa bene, fin dai lavori di GRASSMANN e di HAMILTON, che varie sorte di numeri complessi posson servire utilmente in Geometria. Così con tali numeri si son rappresentati analiticamente i movimenti, e poi anche i gruppi lineari omogenei, ecc. In questi ultimi anni, seguendo un antico accenno di CLIFFORD, si son considerati in particolare i tre sistemi di numeri complessi a due unità $a + b\varepsilon$, in cui il quadrato dell'unità ε vale -1, $+1$, 0. Essi rappresentano in un certo senso le tre geometrie iperbolica, ellittica, parabolica. Quelli con $\varepsilon^2 = 0$ ebbero applicazioni importanti, specialmente nella geometria della retta, da vari scienziati: STUDY, KOTJELNIKOFF, SEILIGER, JOHANNES PETERSEN [21]. Nella *Geometrie der Dynamen* dello STUDY ne è fatto ampio uso. Assumendo tre di questi numeri come coordinate omogenee di una retta nello spazio, la geometria metrica delle rette e dei com-

---

(19) *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles,* Paris, 1903.

(20) V. il mio lavoro già citato dei Math. Ann., XL.

(21) V. le citazioni a pp. 207-8 del libro di STUDY. Il nome PETERSEN è stato poi mutato in HJELMSLEV.

plessi lineari o dinami acquista una singolare semplicità ed eleganza! È notevole che questa geometria metrica viene a differire da quella ordinaria per quel che riguarda gli elementi all'infinito. Volendo render chiuso il continuo formato dalle ∞^4 rette proprie dello spazio, lo si può completare aggiungendo non le ordinarie rette all'infinito ma gli ordinari punti all'infinito (22).

Non è improbabile che anche altre specie particolari di numeri complessi vengano a rendere importanti servizî alla Geometria!

Anche una limitazione del corpo dei numeri adoperati in Geometria sembra destinata ad un avvenire! La teoria aritmetica delle forme nel campo dei numeri interi equivale ad una geometria del reticolo (*Zahlengitter*) costituito dai punti colle coordinate *intere*. Di ciò ha fatto notevoli applicazioni ad es. H. MINKOWSKI nella sua « *Geometrie der Zahlen* » (23) e altrove. Similmente POINCARÉ in una Memoria del 1901 « *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques* » (24) ha cominciato a considerare le curve piane algebriche a coefficienti *razionali*, dal punto di vista del gruppo di quelle trasformazioni birazionali i cui coefficienti son pure razionali. Si hanno allora, per l'equivalenza di due curve da questo punto di vista, dei criteri nuovi, più restrittivi che nella ordinaria geometria sopra una curva. Così, oltre al genere, compaiono certi nuovi caratteri invariantivi.

Una geometria dei punti di coordinate *razionali* si presenta come una necessità matematica a chi accetti il concetto di KRONECKER e di GUSTAVE ROBIN (25), che esclude dall'Analisi i così detti numeri irrazionali!

Si avvera quanto il KLEIN (26) nel 1892 profetava: cioè che col tempo la unione della Geometria colla teoria delle funzioni non sarebbe più bastata, ma come terza alleata avrebbe dovuto entrare la teoria dei numeri!

Così, o Signori, il mio discorso — che, per non stancarvi troppo, io debbo troncare — ritorna al suo punto di partenza. Quantunque

---

(22) V. anche STUDY, *Ein neuer Zweig der Geometrie*, Jahresber. der deutschen Math.-Vereinigung, 11, 1902, p. 97.

(23) Leipzig 1896, V. anche Math. Ann., LIV, 1901, p. 91.

(24) Journal de math., (5) 7, p. 161.

(25) *Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre*, Paris 1903.

(26) *Riemannsche Flächen* II. Lithogr. Vorles., Göttingen, 1892, p. 71.

io non abbia nemmen parlato della geometria differenziale, di quella che MONGE chiamava « *Application de l'Analyse à la Géométrie* », pure voi avrete notato quanto numerosi sono gli analisti, che io ho citato per le loro ricerche geometriche! Ciò deriva, io credo, non solo dal possedere l'Analisi strumenti potenti per la trattazione dei problemi geometrici, ma anche dal fatto che i campi geometrici più coltivati ai nostri giorni presentano questo carattere: d'interessare in un modo o nell'altro anche gli analisti. Ed ora questi intendono bene l'importanza della Geometria. E così, per dare ancora qualche esempio, la concezione geometrica delle equazioni differenziali è accolta da tutti ([27])! E così voi vedete WIRTINGER e POINCARÉ ricorrere a certe varietà iperspaziali nei più recenti studî delle funzioni Abeliane e delle Θ; e PINCHERLE, che rappresenta le funzioni analitiche con punti di uno spazio ad infinite dimensioni, traendone grandi vantaggi nello studio delle operazioni funzionali; e i trattati ultimi di PICARD, di HENSEL-LANDSBERG, di KRAZER, e di altri, che si valgono ripetutamente delle rappresentazioni geometriche! Finora queste rappresentazioni si son fatte specialmente per le funzioni algebriche e loro integrali. Ma, se il parallelismo fra Geometria ed Analisi sarà esteso a campi numerici e funzionali più ampî e più varî, ne potranno derivare nuovi punti di vista e nuovi importanti risultati per entrambe le scienze!

([27]) Cfr., fra tante, le ricerche geometriche di E. von WEBER per la *Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen*, Math. Ann., LV, 1901, p. 386,